Math. Z. 165, 11–18 (1979)

Mathematische Zeitschrift

Ein Verschwindungssatz für automorphe Formen zur Siegelschen Modulgruppe

Eberhard Freitag

Dantestraße 19, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Es sei S_n die Siegelsche Halbebene n-ten Grades, also die Menge aller n-reihigen symmetrischen komplexen Matrizen $Z = X + iY$ mit positiv definitem Imaginärteil Y. Auf S_n operiert die reelle symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ als Gruppe analytischer Automorphismen vermöge

$$Z \to MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}). \tag{1}$$

Die Siegelsche Modulgruppe Γ_n besteht aus den ganzzahligen symplektischen Matrizen

$$\Gamma_n = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}).$$

Im folgenden sei $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ eine mit Γ_n kommensurable Gruppe. Die Gruppe $\Gamma \cap \Gamma_n$ hat also sowohl in Γ als auch in Γ_n endlichen Index.

Gegeben sei ein Homomorphismus

$$\rho\colon\ \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(m, \mathbb{C}), \qquad n > 1.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß ρ eine rationale Darstellung ist, daß also die Komponenten

$$\rho_{\nu\mu}(A); \qquad 1 \leqq \nu, \mu \leqq m$$

durch rationale Funktionen in den Komponenten von A gegeben werden. Sind überdies alle $\rho_{\nu\mu}(A)$ Polynome, so wollen wir die Darstellung *polynomial* nennen.

Unter einer automorphen Form zur Darstellung ρ bezüglich der Gruppe Γ verstehen wir eine holomorphe Abbildung

$$f\colon\ S_n \to \mathbb{C}^m$$

mit der Eigenschaft

$$f(MZ) = \rho(CZ+D)\, f(Z) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma. \tag{2}$$

0025-5874/79/0165/0011/$01.60

Ziel dieser Arbeit ist der Beweis von

Satz 1. *Wenn zu der irreduziblen rationalen Darstellung ρ eine von Null verschiedene automorphe Form existiert, so ist entweder ρ trivial oder von der Form*

$$\rho(A)=\det A\cdot\rho_0(A)$$

mit einer polynomialen Darstellung ρ_0.

Folgerung. *Jede Γ-invariante holomorphe alternierende Differentialform vom Grad p verschwindet in den Fällen*

$$1\leqq p\leqq\frac{n(n-1)}{2}.$$

Hilfssatz 1. *Sei $f\colon S_n\to\mathbb{C}^m$ eine automorphe Form bezüglich der rationalen irreduziblen nicht trivialen Darstellung ρ. Dann sind die Differentiale der Komponenten von f linear unabhängig, d.h.*

$$\sum_{\nu=1}^{m}c_\nu f_\nu=\text{const.}\Rightarrow c_1=\dots c_m=0,\qquad (c_\nu\in\mathbb{C}).$$

Beweis. Die natürliche Zahl m_0 sei maximal mit folgender Eigenschaft:

Es existiert eine Matrix $B\in\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$, so daß die ersten m_0 Komponenten von

$$g:=Bf$$

konstant sind.

Wir wollen Hilfssatz 1 indirekt beweisen, nehmen also $m_0>0$ an. Die Funktion g ist eine automorphe Form bezüglich der konjugierten Darstellung

$$\rho^B(A):=B\cdot\rho(A)\cdot B^{-1}.$$

Insbesondere gilt

$$g_i(U'ZU)=\sum\rho_{ij}^B(U^{-1})\,g_j(Z)\quad\text{für}\quad\begin{pmatrix}U' & 0\\ 0 & U^{-1}\end{pmatrix}\in\Gamma. \tag{3}$$

Wegen der Maximalität von m_0 ist keine nichttriviale Linearkombination der Funktionen g_ν, $m_0<\nu\leqq m$, konstant. Daher gilt

$$\rho_{ij}^B(U^{-1})=0\quad\text{für}\quad i\leqq m_0,\ j>m_0.$$

Die Menge der hierbei auftretenden Matrizen U enthält eine Untergruppe $G\subset\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})$ von endlichem Index. Nun ist $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})$ und damit auch G Zariski-dicht in $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$. Da die Komponenten von ρ rationale Funktionen sind, folgt

$$\rho_{ij}^B=0\quad\text{für}\quad i\leqq m_0,\quad j>m_0.$$

Aus der Irreduzibilität von ρ folgt nun $m_0=m$, d.h. die Funktion $f(Z)$ ist überhaupt konstant. Dieser konstante Vektor wird von allen Matrizen $\rho(CZ+D)$ festgelassen. Dies ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität und Nichttrivialität von ρ.

Der Beweis von Satz 1 beruht auf einem Rückgriff auf die Hilbertsche Modulgruppe. Für gewisse Matrizen $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ erhält man durch den Spezialisierungsprozeß

$$f^A(z) := \rho(A) \cdot f(A' z^* A) \tag{4}$$

Hilbertsche Modulformen. Dabei sei $z \in S_1^n$ im Produkt von n oberen Halbenen enthalten. Wir verwenden generell die Bezeichnung

$$z^* := \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad z = (z_1, \ldots, z_n).$$

Hilfssatz 2. *Gegeben sei ein m-Tupel*

$$(P_1, \ldots, P_m) \neq (0, \ldots, 0)$$

von Polynomen in den Komponenten einer variablen n-reihigen Matrix. Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 *existiert eine Matrix* $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, *so daß die auf* S_1^n *definierte Funktion*

$$\sum_{\nu=1}^{m} P_\nu(A) \cdot f_\nu(A' z^* A)$$

nicht konstant ist.

Beweis. Wir entwickeln die Funktionen $(f_1, \ldots, f_m)$ in Fourierreihen:

$$f_\nu(Z) = \sum_{T \geqq 0} a_\nu(T)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}.$$

Es gilt

$$a(0) = \rho(U)\, a(0) \tag{5}$$

für alle Matrizen U aus einer Zariski-dichten Untergruppe von $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$. Da die Darstellung ρ irreduzibel und nichttrivial ist, folgt

$$a_\nu(0) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, \mathrm{m},$$

und daher

$$\lim_{y_1, \ldots, y_n \to \infty} f_\nu(A' z^* A) = 0.$$

Wenn die in Hilfssatz 2 definierte Funktion konstant ist, verschwindet sie demnach identisch.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also

$$\sum_{\nu=1}^{m} P_\nu(A) f_\nu(A' z^* A) = 0 \quad \text{für alle} \quad A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \tag{6}$$

an. Für $z=(i, \ldots, i)$ bedeutet dies

$$\sum_T P(T, A)\, e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A)} = 0 \tag{7}$$

mit

$$P(T, A) := \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu(T)\, P_\nu(A).$$

Wir behaupten nun allgemein:

Gegeben sei eine für alle $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ *absolut konvergente Reihe*

$$\sum P(T, A)\, e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A)},$$

wobei über semipositive ganze symmetrische Matrizen T *summiert werde. Für festes* T *sei* $P(T, A)$ *ein Polynom in den Komponenten von* A. *Wenn die Reihe identisch verschwindet, so gilt*

$$P(T, A) = 0 \quad \textit{für alle} \quad T \quad \textit{und} \quad A.$$

Im Falle $n=1$ kann man dies leicht durch Induktion nach T beweisen. Sei

$$P(T, A) = 0 \quad \text{für} \quad T < T_0.$$

Multipliziert man die Reihe (7) mit

$$e^{\pi \operatorname{Sp}(T_0 A' A)}$$

und führt anschließend den Grenzübergang $A \to \infty$ durch, so erhält man

$$P(T_0, A) \to 0 \quad \text{für} \quad A \to \infty$$

und somit

$$P(T_0, A) = 0.$$

Im Falle $n \geqq 1$ betrachten wir die Relation

$$\sum P(T, a A)\, e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A) a^2} = 0 \tag{8}$$

für festes $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ und variables $a \in \mathbb{R}$. Da der Fall $n=1$ bereits erledigt ist, erhalten wir

$$\sum_{\operatorname{Sp}(T A' A) = t} P(T, a A) = 0, \qquad t \geqq 0. \tag{9}$$

Spezialisiert man diese Relation auf $a=0$, so folgt

$$\sum P(T, 0)\, e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A) a^2} = 0. \tag{10}$$

Da sich jede positiv definite Matrix in der Form $A' A$ schreiben läßt, schließt man aus der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung

$$P(T, 0) = 0 \quad \text{für alle} \quad T. \tag{11}$$

Wir differenzieren nun die Relation

$$\sum P(T, A)\, e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A)} = 0 \tag{12}$$

nach den Komponenten von A und erhalten eine analoge Relation, deren Koeffizienten $\tilde{P}$ die Form

$$\tilde{P}(T, A) = \frac{\partial}{\partial a_{ik}} P(T, A) + Q(T, A) \tag{13}$$

mit $Q(T, 0) = 0$ haben.

Aus $\tilde{P}(T, 0) = 0$ folgt daher

$$\frac{\partial}{\partial a_{ik}} P(T, 0) = 0. \tag{14}$$

Durch Iteration dieses Verfahrens zeigt man, daß auch die höheren Ableitungen von $P(T, A)$ in $A = 0$ verschwinden. Dies bedeutet

$$P(T, A) = 0. \tag{15}$$

In dem uns interessierenden Fall (7) bedeutet dies

$$\sum_{\nu=1}^{m} P_\nu(A) f_\nu(Z) = 0 \quad \text{für alle} \quad A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}).$$

Die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ sind demnach linear abhängig im Widerspruch zu Hilfssatz 1.

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten der Funktion (4). Sei

$$M = (M_1, \ldots, M_n); \qquad M_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$M^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = (a_1, \ldots, a_n), \ldots.$$

Hierdurch erhält man eine Einbettung

$$\begin{aligned} \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})^n &\hookrightarrow \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}), \\ M &\mapsto M^* \end{aligned}$$

welche mit den üblichen Operationen dieser Gruppen verträglich ist:

$$(M z)^* = M^* z^*.$$

Wir „projizieren" nun die Gruppe Γ bezüglich der durch eine Matrix $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ definierten Einbettung

$$\begin{aligned} S_1^n &\to S^n \\ z &\mapsto A' z^* A, \end{aligned} \tag{16}$$

d.h. wir betrachten

$$\Gamma_A := \left\{ M \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})^n;\ \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^* \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma \right\}. \tag{17}$$

Offenbar hat die Funktion

$$h(z) := \rho(A) f(A' z^* A) \tag{18}$$

das Transformationsverhalten

$$h(M z) = \rho(c^* z^* + d^*)\, h(z) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_A. \tag{19}$$

Wir sind nur an solchen Einbettungen interessiert, für die Γ_A genügend groß ist.

Hilfssatz 3. *Die Menge aller Matrizen A, für die Γ_A mit einer Hilbertschen Modulgruppe kommensurabel ist, liegt dicht in* $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Beweis. Sei $K/\mathbb{Q}$ ein total reeller Zahlkörper vom Grad n. Wir fassen die n verschiedenen Isomorphismen $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ zu einer Einbettung

$$K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\omega \mapsto (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})$$

zusammen. Das Bild von K liegt dicht in $\mathbb{R}^n$. Einer beliebigen Körperbasis $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ordnen wir die invertierbare Matrix

$$A = (\omega_i^{(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$$

zu. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß Γ_A mit der Hilbertschen Modulgruppe von K kommensurabel ist [1].

Die Menge all dieser Matrizen A liegt offenbar dicht in $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 1. Die Einschränkung von ρ auf die Untergruppe der Diagonalmatrizen zerfällt bekanntlich in eine direkte Summe von eindimensionalen Darstellungen. Da wir ρ durch eine konjugierte Darstellung ersetzen dürfen, bedeutet die Annahme

$$\rho(a^*) = \begin{pmatrix} \rho_1(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_m(a) \end{pmatrix}, \qquad a = (a_1, \ldots, a_n),$$

keine Einschränkung der Allgemeinheit. Es gilt

$$\rho_i(\mathrm{a}) = \mathrm{a}_1^{r_{i1}} \ldots a_n^{r_{in}}; \qquad 1 \leqq \mathrm{i} \leqq \mathrm{m},$$

mit gewissen ganzen Zahlen r_{ij}.

Wir wählen nun eine Matrix $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ mit folgenden beiden Eigenschaften

a) Γ_A ist mit einer Hilbertschen Modulgruppe kommensurable Gruppe.

b) Keine Komponente von $h(z) = \rho(A) f(A' z^* A)$ ist konstant.

Die Existenz einer solchen Matrix A ist dank der Hilfssätze 2, 3 gesichert.

Die Komponenten von h sind wegen (19) Hilbertsche Modulformen:

$$h_i(Mz) = \prod_{j=1}^{n} (c_j z_j + d_j)^{r_{ij}} h_i(z). \tag{20}$$

Nach einem fundamentalen Lemma aus der Theorie der Hilbertschen Modulformen müssen alle r_{ij} positiv sein! (s. [2], Hs. 2.2.).

$$r_{ij} > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq m, \quad 1 \leqq j \leqq n.$$

Hieraus folgt aber

$$\rho_i(a) = 0 \quad \text{falls} \quad a_1, \dots, a_n = 0,$$

d.h. ρ verschwindet auf der Menge aller Diagonalmatrizen der Determinante 0.

Da jede Matrix durch Links- und Rechtsmultiplikation in Diagonalgestalt überführbar ist, folgt

$$\rho(A) = 0 \quad \text{für} \quad \det A = 0.$$

Satz 1 ist damit bewiesen.

Beispiel. Sei $\mathfrak{Z}_n$ der Vektorraum der symmetrischen komplexen Matrizen. Die Darstellung

$$\rho\colon \operatorname{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \operatorname{Gl}(\mathfrak{Z}_n) = \operatorname{Gl}(N, \mathbb{C}), \qquad N = \frac{n(n+1)}{2},$$

ordnet jeder Matrix $A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{C})$ den Endomorphismus

$$\rho(A)\colon \mathfrak{Z}_n \to \mathfrak{Z}_n, \qquad Z \mapsto A' Z A$$

zu. Neben ρ sind auch die äußeren Potenzen

$$\rho^{[p]}(A)\colon \bigwedge^{p} \mathfrak{Z}_n \to \bigwedge^{p} \mathfrak{Z}_n, \qquad 0 \leqq p \leqq N,$$

von Interesse.

Hilfssatz 4. *Die Darstellungen $\rho^{[p]}$, $0 \leqq p \leqq N$, sind irreduzibel. Sie verschwinden auf der Fläche $\{A\colon \det A = 0\}$ genau in den Fällen*

$$N - n < p \leqq N.$$

Beweis. Sei $V = \mathbb{C}^n$ der kanonische $\operatorname{Gl}(n, \mathbb{C})$-Modul. Über die Interpretation symmetrischer Matrizen als Bilinearformen erhält man eine äquivariante Einbettung

$$\mathfrak{Z}_n \to V \otimes V$$

und daher

$$\bigwedge^{p} \mathfrak{Z}_n \hookrightarrow V^{\otimes 2p}.$$

Irreduzible Teildarstellungen von $V^{\otimes m}$ erhält man allgemein mit Hilfe der „Young-Diagramme", (s. [3]). Die Darstellung $\rho^{[p]}$ entspricht dabei dem Diagramm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ 2p-1 & 2p \end{pmatrix}$$

und ist daher irreduzibel.

Die „Funktionalmatrix" einer symplektischen Substitution $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ in einem Punkt $Z_0 \in S_n$ wird bekanntlich durch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Z}_n \to \mathfrak{Z}_n \\ &Z \mapsto (CZ_0 + D)'^{-1} Z (CZ_0 + D)^{-1} \end{aligned}$$

gegeben.

Damit erhalten wir

Bemerkung. Die Γ-invarianten holomorphen alternierenden Differentialformen vom Grad p auf S_n entsprechen umkehrbar eindeutig den automorphen Formen bezüglich der Darstellung $\rho^{[p]}$.

Damit ist auch die Folgerung zu Satz 1 bewiesen.

Literatur

1. Freitag, E., Schneider, V.: Bemerkung zu einem Satz von J. Igusa und W. Hammond. Math. Z. **102**, 9–16 (1967)
2. Freitag, E.: Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe. Invent. Math. **17**, 106–134 (1972)
3. Weyl, H.: The Classical Groups. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 1946

Eingegangen am 8. Mai 1978