

目 录

序：关于本书	1
预微积分的来历	3
1 数与运算	6
1.1 有理数与十进制	6
1.2 代数表达式，多项式	32
1.3 等式及解方程	40
1.4 不等式	55
1.5 实数	61
1.6 复数	72
1.7 第一章综合练习	79
2 函数	84
2.1 集合	84
2.2 计数 (counting)	92
2.3 函数及其表示	98
2.4 第二章综合练习	111
3 初等函数	114
3.1 多项式函数	114
3.2 幂函数	130
3.3 指数与指数函数	134
3.4 对数与对数函数	139
3.5 第三章综合练习	143
4 三角函数	147
4.1 定义及函数图像	147
4.2 三角函数的恒等式	153
4.3 三角形里的三角函数	172
4.4 深度阅读：欧拉公式由来	175
4.5 第四章综合练习	176

5	三角函数的反函数	181
5.1	反三角函数的定义	181
5.2	反三角函数的性质	187
5.3	第五章综合练习	191
6	二维三维坐标中函数形状	193
6.1	二维及三维的坐标系	193
6.2	直角坐标系中函数图像	197
6.3	极坐标系及函数图像 *-选读	204
6.4	二维三维向量运算	210
6.5	直线与平面方程	223
6.6	参数方程及向量函数	229
6.7	第六章综合练习	233
7	数列与级数	239
7.1	数列	239
7.2	极限的概念	250
7.3	级数	267
7.4	第七章综合练习	272
8	微分与积分的概念	276
8.1	切线与运动方程—微分的概念	276
8.2	导数的概念及应用	279
8.3	导函数的逆—不定积分	291
8.4	定积分的概念及应用	295
8.5	第八章综合练习	303
9	AP 微积分自由作答题 (2022 年)	308



序：关于本书

这本书的目的在于帮助学生们完成初等数学的基本训练，以便顺利开始并能及时完成微积分等高等数学的学习。我们坚信：学生们一旦掌握了基本的代数概念和运算技巧，学习了几何，三角函数及其他的初等函数这些初等数学，那么就可以进一步从微观角度（极限和微分的视角），宏观角度（极限和积分的视角）来学习及研究数，函数，几何形状以及相关的实际问题。最终，他们中的大多数将会顺利地、及时地完成大学教育。

倘若你已经阅读学习过我们前面的《代数入门》及《几何与证明》的两本课本，这本书是你完成初等数学的自然选择。同前面的入门书一样，作者将继续秉承教会学生知其然在先，知其所以然紧随其后的一贯宗旨，不厌其烦地介绍各个知识点的来龙去脉。如果你是一位准备参加 College Board 考试的高中生，抑或你是一位即将上大学，准备正式学习微积分的同学，这本书也可以作为你复习初等数学的参考书。

本书的主要内容及适合的读者群罗列如下。

第一章（数与运算）：回顾自然数到复数依赖于代数运算的整个扩展过程。适合所有学过初等代数，尤其学习过多项式运算的学生。

第二章（函数）：回顾集合的定义与运算；介绍计数的基本原理；介绍函数的基本定义与性质。适合所有学过初等代数，尤其学会了多项式运算的学生。

第三章（初等函数）：基于代数运算及其逆运算，介绍除三角函数的所有初等函数。适合所有学过初等代数，尤其学会了多项式运算的学生。

第四章（三角函数）：系统地介绍了一般的三角函数；它们的定义（对任何角度），性质及其应用；介绍了三角函数与复数的紧密关系；适合所有学过初等代数及几何与证明的学生。

第五章（三角函数的逆函数）：系统地介绍了一般的三角函数的逆函数；它们的定义（定义域及值域）。适合所有学过初等代数，几何与证明的学生及第四章内容的学生。

第六章（二维三维几何形状及表示）：基于向量运算的几何问题代数化。适合所有学过初等代数，几何与证明的学生；要求掌握三角函数知识。选择性地学习圆锥曲线的参数形式。

第七章（数列与级数）：高等数学的初步了解；涉及极限的概念；回答初等数学基本假设的由来，以及无限循环小数的严格定义；适合所有学过初等代数，几何与证明及三角函数，并准备继续进入大学深造的学生。

第八章 (微分与积分的概念): 微积分的初步介绍。适合所有学过初等代数, 几何与证明及三角函数, 并准备继续进入大学深造的学生。

第八章 (微分与积分的概念): 微积分的初步介绍。适合所有学过初等代数, 几何与证明及三角函数, 并准备继续进入大学深造的学生。

第九章 (AP 微积分自由作答题): 我们从 College Board 网站选取了最新一期的微积分 AP 考试中的三道自由作答题并作简要的评价。我们希望由此传递给同学们如下信息: 读者在读完这本书后, 应该有信心在较短的时间里自己学完并理解 AP Calculus 所要求的知识。

本书是朱梅俊教授 (Meijun Zhu, Mathematics Professor at the University of Oklahoma 及中国科学技术大学教授, Founder of Everyone-Math Institute) 为中学生和大学新生所撰写。为方便读者阅读和节约时间, 本书引用了 [Elegant \$\text{\LaTeX}\$ 模板](#) ([GitHub](#))。感谢蔡雷教授所做的封面设计。

关于作者: 朱梅俊现为 (2022 年) 美国俄克拉荷马大学数学终身教授及中国科学技术大学教授, 世界知名的偏微分方程方面专家。曾获美国数学会世纪奖 (2001 年 AMS centennial fellowship)。朱教授在自己的两个孩子少年时曾辅导, 陪伴他们的数学学习。是数学有效教育的倡导者, 履行者和受益者。



前言：微积分的意义

本书沿袭美国中学数学教育体系里的 Pre-calculus（我们译成：“预微积分”，或者“准微积分”）的内容。结合国内学生普遍较高的代数学习水平我们在后面两章加入了极限与微积分的介绍（并回答了《代数入门》和《几何与证明》里遗留下的一些问题）。主要是为学习微积分所做的初等代数学，初等几何学的知识准备。微积分主要包括两个方面的知识：微分和积分。大致来说，微分是通过各种“刨分”，运用极限的工具，于细微处观察事物的特性。比如通过微分，我们可以定义运动的即时速度，曲线的切线，曲线的弯曲度等等。积分则是将捕捉到的细微信息综合起来，通过极限工具来得到一个对事物总体的评判。最常见的积分应用便是几何图形面积，体积的计算。事实上，积分也是在无穷维向量空间里引入内积的基本工具（从而有现代傅里叶分析），而这些又是现代社会数字话的数学基础。

这里我们只从逻辑的角度，聊聊在学完代数入门和几何与证明之后，学习微积分对我们更深入理解数学有什么帮助。

我们首先来回顾一些在《代数入门》和《几何与证明》中还没有回答的问题。

1. 无限循环小数问题

在抽象地引入一个非零整数的倒数时，我们没有“形象”地介绍这样的数。而没有论证的“算术运算”又容易引导大家以为下面的长除运算合情合理：

$$\begin{array}{r} 0.3333 \\ 3 \overline{) 1.0000} \\ \underline{- 9} \\ 10 \\ \underline{- 9} \\ 10 \\ \underline{- 9} \\ 1 \end{array}$$

因而，我们见到下面的记号

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$$

并称之为无限循环小数。

事实上，上面的第一步是没有问题的：

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.1}{3}.$$

下一步也没有问题：

$$\frac{1}{3} = 0.3 + 0.03 + \frac{0.01}{3}.$$

但是谁能保证这样的运算能一直无限地运算下去？能的话又是什么意思呢？在介绍了极限概念及无限级数的收敛性后，我们才能明白无限循环小数的概念，以及上面运算的合理性。

2. 初等代数的基本假设

在《代数入门》的第十一章我们介绍的“初等数学基本假设”：假如一个初等代数运算对所有的有理数成立，那么这个初等代数运算对所有的实数都成立。运用这个假设，我们把有理数里的很多运算推广到无理数域上。一个典型的例子便是长方形的面积的定义。在这本书里我们将解释：为什么这个假设是成立的。

3. 函数的多项式逼近

在《代数入门》和《几何与证明》的学习中，我们已经遇见了很多基本的问题，比如如何计算 $\sqrt{2.3}$ 的值？以及看上去很复杂的问题：如何估计 π 的值？

一个看上去没有直接关系的问题是：如何找抛物线 $y = x^2$ 过点 $(1, 1)$ 的切线方程？根本上，我们希望学习一个系统的方法来理解初等函数以及以后更复杂的函数。打个比方：我们想了解一个洋葱。我们会去一层一层地剥去它的外皮（壳）。

剥去洋葱的外皮形象上很相似于求一个函数的切线。知道如何求一般函数的切线，我们就可以在函数的一点附近用多项式来逼近它。这个思想不仅让我们能够计算诸如 $\sqrt{2.3}$ ， π 及 e 的值，也帮助我们更好地理解原先遇见的复数。特别地，我们会揭示奇妙的欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

是如何得到的。

4. 物理等科学的推动

物理学里面的运动学研究也促进了微积分的发展。由微分我们容易理解即时速度的定义，由积分我们也容易得到匀加速运动的距离公式。微积分的使用也让我们比较容易地理解如何推导出 Kepler 关于行星绕太阳运动的三大定律（一般的微积分教程里会有论述）。

我们最后提一下大多数国人耳熟能详的“曹冲称象”的故事（详见本书 8.4 节）。中国古代先哲不缺乏从宏观到微观（微分思想），以及由小处到大处（积分思想）这样的哲学思想。没能完成的是得到一套相对系统，严谨且完善的理论。希望我们这套三本书能帮助到读者对初等数学有个整体的理解，为他们下一步更深

入学习高等数学打下坚实的基础；尤其希望这本书起到把初等数学与高等数学衔接起来的作用。

Copyright by Meijun Zhu 5-1-2023

