

## -1 = 1 吗？

诸子数学

11-28-2020

这篇文章适合五年级年级以上的学生及学生家长，中学教师；及任何童心未泯的老儿童，青壮年。

在学习十进制数及多项式的运算时，除了要熟悉加法和乘法的三大运算法则以外（交换律，结合律还有分配律），就是要熟悉指数的三个运算法则：对非零的两个数  $a$  和  $b$ ，以及整数  $m$  和  $n$ ，我们有

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (2) (a^n)^m = a^{nm} \quad \text{及} \quad (3) (ab)^m = a^m \times b^m.$$

由指数的定义大家可以试着推出上面的三个法则。不会推也没关系，记得指数必须是整数上面法则才成立（你还要问：为什么指数非得是整数，那就推导一下上面的公式吧）。

一个很聪明的学生和他的家长问下面推导有什么问题：

首先：

$$[(-1)^{\frac{1}{2}}]^2 = [-1]^{\frac{1}{2} \times 2} = -1。$$

另一方面，

$$[(-1)^{\frac{1}{2}}]^2 = [-1]^{\frac{1}{2} \times 2} = [-1]^{2 \times \frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1。$$

所以得到了一个矛盾的结论：-1=1。

在运用指数运算法则（2）时，指数  $n, m$  必须是整数。上面推导中  $1/2$  不是整数，所以导致矛盾的结果。

还有类似的错误推导。比如：运用指数运算法则（3）：

$$a^p \times b^p = (ab)^p,$$

诸子杂谈-5

我们得到：

$$(-1)^{\frac{1}{2}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} = [(-1) \times (-1)]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

稍后大家会学到  $(-1)^{\frac{1}{2}} = i$  是个复数，它的定义是： $i^2 = -1$ 。但上面推导的式子却说  $i^2 = 1$ 。这次你看出来哪里出错了吧？

指数是分数时，我们必须引入新的数（基是正数的话我们要引入无理数，基是负数的化更要引入复数的概念了）。到那个时候我们再检阅指数运算满足什么法则。