诸子杂谈-17

谈谈一元二次方程之三 -代数基本定理及韦达定理的科学启示

诸子数学

4-10-2021(更新：10-4-2023)

《这篇文章适合六年级及以上的学生及学生家长，小学教师，中学老师； 任何童心未泯的老儿童，青壮年， 及任何一位希望重新温习一遍初等数学的数学教育者，爱好者。》

在《谈谈一元二次方程之二》中我们提到：假如我们被告知有一个形式如 a+bi (复数的一般形式。这里，a, b 是两个实数)的数，它的平方是 i， 那我们就能算出 a 是什么数， b 是什么数。

我们只要用到代数运算法则以及 i 的平方是-1 这个性质就可以了。由定义，我们可以计算

$$i=(a+bi)^2=(a+bi)(a+bi)=a^2-b^2+2abi。$$

比较上面最左端及最右端两个复数的实部和虚部（两个复数相等的定义）就得到

$$a^2-b^2=0，\ 2ab=1。$$

由此知道：$a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 或 $a=b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。也就是说 i 的平方根有两个:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad 及 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i。$$

用这样的计算思路，我们可以验证：对任何一个复数 a+bi, 我们都可以找到两个复数 z,使得这两 z 的平方都是这个复数 a+bi! 也就是说：总有两组实数对 x， y, 它们满足方程

$$（x+yi）^2=a+bi。$$

结合我们在《谈谈一元二次方程之二》中讲到的配方法， 我们现在就可以说: 任何的以复数为系数的一元二次方程都有两个复数根！换一个说法，任何的以复数为系数的一元二次多项式都可以在复数域里因式分解成两个一次多项式的相乘 --- 这正是 对应于一元二次方程的代数基本定理！

诸子杂谈-17

把一元二次多项式在复数域里因式分解成两个一次多项式的相乘

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

这里x_1，x_2是 $x^2 + px + q = 0$ 的两个解。把上式的右端乘开并与左端相应的项比较，我们就会发现下面的规律(著名的韦达公式)：

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad 且\ \ x_1 \cdot x_2 = q。$$

韦达定理有着美妙的科学意义：对一个给定的一元二次方程，我们也许不能写出它的两个解（技术上太难：比如有同学还没学习复数或者实数），但我们能得到部分有关解的性质：我们知道两个解的和，也知道两个解的积！

你也许会说：学过了复数后，我们把一元二次方程方程解出来就好了，何必劳烦用韦达定理来求两个解的和，两个解的积呢？是的，二次方程没什么可怕的。但是三次方程，四次方程，甚至更高次方程呢？一元二次方程的韦达定理的推导对我们有很好的指导意义。

我们首先考虑下面这个问题：

一个 n 次多项式能不能被分解成 n 个一次多项式相乘？换句话说：一个一元 n 次方程

$$x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0 = 0$$

总有 n 个根吗？

答案是肯定的（n=2 时我们已经会证明了！）---一个一元 n 次方程总有 n 个根(可能有重复的根)。这个结果被称为关于一元多次方程的代数基本定理！需要提醒大家的是：对一般的自然数 n, 代数基本定理的证明要等到大学数学系二年级的复变函数课里才给出！

由代数基本定理，我们就可以像二次方程那样来推导韦达公式了。

首先注意到下式总是成立的：

诸子杂谈-17

$$x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0 = (x - x_1)(x - x_2)\cdots\cdots(x - x_n),$$

这里x_1，$x_2, \dots, x_n$是 $x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0 = 0$ 的 n 个解。由上式，通过代数运算我们就得到根与系数关系的韦达定理。这里我们列举其中的两个关系：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -C_{n-1}$$

及

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = (-1)^n C_0。$$

高次方程一般不容易解出所有的复数根。这个时候韦达定理给出的部分信息就很有意义了。不信的话，你可以来试试下面的练习。

练习： 假如x_1，x_2, x_3 是 $x^3 + 7x^2 - 9x + 13 = 0$ 的 3 个解， 试着计算

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

的值。