

谈谈一元二次方程之一

诸子数学

3-27-2021

《这篇文章适合五年级及以上的学生及学生家长，小学教师，中学老师；任何童心未泯的老儿童，青壮年，及任何一位希望重学一遍初等数学的数学教育者。》

在孩子们懂得了代数式，代数式运算以及会解一次方程之后（会四则运算和指数运算，会多项式相乘，记得等式相等的性质。参见《数学学习的第一个障碍---分数运算》，《代数学习的第一个甜头---解方程》，《二项式公式---贾宪三角文》等头条短文），就会发现：自己可以解一元二次方程了！

比如，我们来解 $(x-2)(x+3)=0$ 。使用等式相等的性质，我们推理：两个数 A 和 B 相乘等于 0，那么或者 $A=0$ ；或者 $B=0$ （自己想想原因。可以参看文后列出的等式相等的性质）。所以，从 $(x-2)(x+3)=0$ ，我们知道：或者 $x-2=0$ ，从而 $x=2$ ；或者 $x+3=0$ ，从而 $x=-3$ 。结论是， $(x-2)(x+3)=0$ 这个一元二次方程有两个解： $x=2$ 或 $x=-3$ 。

做个简单代数运算

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6。$$

所以，我们事实上学习到了如何解一元二次方程

$$x^2 + x - 6 = 0。$$

我们第一步把一元二次多项式写成两个一次多项式相乘（这个过程被称作因式分解）

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)。$$

然后使用等式相等的以下一个延申性质：

$$AB = 0, \quad \text{那么 或者 } A = 0, \quad \text{或者 } B = 0,$$

就可以完成解方程了。

我们再来看个例子。

解方程

$$x^2 + 8x + 16 = 1。$$

解：（先别急着做因式分解：因为右端不是 0）原方程等价于

$$x^2 + 8x + 15 = 0。$$

先做因式分解得到等价方程

$$(x + 3)(x + 5) = 0。$$

由此得到结果： $x=-3$ 或 $x=-5$ 。（要想万无一失的话，可以再检查以下结论）。

由此可见：只要能做因式分解，解一元二次方程就是水到渠成的容易事了。

事实上，可以证明：假如系数及常数项都是有理数的二次方程有两个有理数解，那么我们总可以将二次多项式在有理数域里因式分解！最常见的因式分解方法就是叉乘法。孩子要是不知道的话问你们的家长，或者自己读书/在网上搜。当然，因式分解并不是一个容易掌握的技巧，需要一定的训练。可以试试看：你要多长时间能判定出 5609 是个合数还是素数。

下一节回答以下问题：

那要是方程没有有理数解怎么办？比如怎么解

$$x^2 + 8x + 14 = 0?$$

我们在下篇再聊。

为读者的方便，我将等式相等的性质再累述如下：

等式相等的性质

(1)(相加不变性) 若两个数相等： $A = B$ ，那么对任何数 C ，都有

$$A + C = B + C。$$

(2)(相乘不变性) 若两个数相等： $A = B$ ，那么对任何数 C ，都有

$$A \times C = B \times C。$$

(3)(相等的对称性) 若 $A = B$ ，那么 $B = A$ 。

及

(4)(等量传递性) 若 $A = B$ ，且 $B = C$ ，那么

$$A = C。$$