诸子杂谈-16

谈谈一元二次方程之二 -实数域,复数里的解

诸子数学

3-27-2021

《这篇文章适合六年级及以上的学生及学生家长，小学教师，中学老师； 任何童心未泯的老儿童，青壮年， 及任何一位希望重新温习一遍初等数学的数学教育者，爱好者。》

在《谈谈一元二次方程之一》中我们讲到：假如一个一元二次方程可以因式分解 (比如 $x^2+x-6=0$ 等价于 $(x-3)(x+2)=0$), 我们就可以由等式性质来解方程了。这也表明：学会（或着说熟悉）因式分解对学会解一元二次方程至关重要。

遗憾的是(事实上，一个困难的出现也预示着一个突破口的出现), 有些二次多项式不能在有理数域里被因式分解。比如：$x^2+8x+14$。因而，用有理数域里的因式分解来解 $x^2+8x+14=0$ 就撞上南墙了。是我们不够用功(听说过愚公移山吗)？还是要新的工具？

这不是用功不用功的问题，愚公移山，他还要有坚硬的开山斧，甚至炸药。撞上南墙更是说明我们要飞跃了：我们在有理数里找不到解，那么我们就要把数域扩大 。(还记得我们如何通过代数运算一步一步把数域从自然数扩大开的吗？)

首先我们来看一个稍微简单的方程: $x^2-2=0$。它等价于 $x^2=2$。我们要问：有没有一个数 x, 它的平分是 2？正整数没有：1 小了， 2 又大了。分数呢：1.41 小了， 1.42 大了；1.414 还是小了，1，415 又大了！ 。。。我们事实上碰到了一个无形的大山：究竟有没有一个正数，它的平方是 2? 这是一个相当根本的数学问题，需要一定的数学知识的储备才能比较完善地回答它。简便起见，为了实数域的完备性，我们承认有正数 x,它的平方是 2。记这个数为$\sqrt{2}$，并称它是 2 的主平方根 (是时候回顾我们有关平方根的头条杂谈了：《算术平方根，那算术立方根呢？-初等数学的第二个大障碍》。对了， 别忘了 2 还有一个负的平方根)。是的，我们能证明: 2 的主平方根不是一个分数---也即一个有理数。因而我们称之为无理数！

诸子杂谈-16

有了平方根的引进，我们就可以在实数域（有理数+无理数）上解方程了。

来看如何解： $x^2+8x+14=0$。

首先我们来学一下配方的技巧---这是数学里常用的技术，目的是把原方程简化为：

未知量 ^{2}=已知量的形式。

$x^2+8x+14=0$ 等价于 $x^2+8x+16=2$， 也即 $(x+4)^2=2$。

所以

$x+4=\sqrt{2}$, 或 $x+4=-\sqrt{2}$。

从而我们得到结果

$x=-4+\sqrt{2}$, 或 $x=-4-\sqrt{2}$。

上述解法非常通用：原先使用因式分解能解的方程也可以用配方法来解。事实上，对一般的一元二次方程

$$x^2+px+q=0,$$

运用配方法我们得到它的等价方程

$$(x+\frac{p}{2})^2=-q+\frac{p^2}{4}。$$

由此得到著名的一元二次方程的平方根公式：

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}。$$

显然，只有$p^2-4q\geq 0$时，上述公式才有实数解！

我们也注意到数学家罗博深有一个看似”简洁”的计算技巧：

首先将x^2+px+q写为

诸子杂谈-16

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2} + u)(x + \frac{p}{2} - u)$$

这里 u 是我们下一步要找的数。比较两边(比方，快速地，取 x 为 0)，我们知道

$$q = \left(\frac{p}{2} + u\right)\left(\frac{p}{2} - u\right)。$$

由此得：

$$u^2 = \frac{p^2}{4} - q^2,$$

从而得到一元二次方程的平方根公式的”另一个推导方式”。这里，我们想批判性地指出：上述技巧可以作为解方程的一种练习，但不应该被看作是平方根公式的”另一个推导方式”，因为：它隐含地用到了一个更基本的理论：代数基本定理---这个理论保证了任何一个二次多项式一定能被因式分解为两个一次多项式的相乘---我们在下一个杂谈里会再次论述这点。

下面一个自然但深刻的问题是(你自己会问吗？)： 若$p^2 - 4q < 0$，我们怎么解上面的方程？是的，我们又要扩张数域了！ 首先我们讨论：有没有数 x, 它的平方是-1？我们可以强行引入一个虚数 i，它的平方定义为-1。好像这样问题就解决了。且慢！ 这里还有个更难的问题：有没有数 x, 它的平方是 i 呢? 假如你被告知，有一个形式如 a+bi (这里，a, b 是两个实数)的数，它的平方是 i， 那你有信心算出什么数是 a, 什么数是 b 吗？