

循环小数——危险但具有挑战性的话题

朱梅俊

01-13-2024

本文适合所有学过五年级数学的人。希望十年后（特别是在足够多的人阅读本文之后），我们会将循环小数的概念从任何代数教科书中移至预微积分教科书中。© 朱梅俊 (mthcnt@gmail.com)

近年来，ChatGPT 非常火热。所以我决定先问它一个问题：

$$\frac{1}{3} = 0.333333 \dots \dots \text{对吗?}$$

ChatGPT 3.5 的回答是：

是的， $1/3$ 的小数表示是 $0.333333\dots\dots$ 这是一个无限重复的小数，其中数字 3 无限重复。

我们能指望什么呢：所有的教科书可能会给出相当一致的答案。循环小数！假如我建议你们丢弃循环小数的名词，你们或许嗤之以鼻。所以，退一步，我建议在教授学生们无限级数的概念之后再介绍这个概念。什么原因呢？我们在下面展示：在代数中引入循环小数会导致多少麻烦（以及对公式的误用）。

我们先来看如何得到重复小数 $\frac{1}{3} = 0.333333 \dots \dots$ （请参阅作者的《预微积分》书）。

我们一般使用下面的天真的算术计算（用令人困惑的长除法表示出来）：

$$\begin{array}{r} 0.3333 \\ 3 \overline{) 1.0000} \\ \underline{- 9} \\ 10 \\ \underline{- 90} \\ 10 \\ \underline{- 9} \\ 1 \end{array}$$

因此，我们有以下表示：

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3} = 0.333333 \dots$$

并将右侧称为“重复小数”。

现在让我们仔细检查上面的计算。上述计算的第一步是正确的：

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.1}{3}$$

下一步也没问题：

$$\frac{1}{3} = 0.3 + 0.03 + \frac{0.01}{3}$$

但是谁能保证计算会继续下去呢？即使它能够继续下去，这个过程真正含义是什么？不要责怪在这里感到困惑的学生。

另一方面，由于除法是乘法的逆运算，我们知道

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3} = 0.333333 \dots$$

等同于

$$1 = 3 \times 0.333333 \dots$$

因此，我们需要说服人们：

$$3 \times 0.333333\cdots = 0.9999\cdots = 1。$$

然而，上述计算的第一步就不能正确地向学生解释，因为乘法分配律可能不适用于无限求和！第二步的计算我们通常在“高级”的数学课程（比如准备数学竞赛的课程）中这样教授的：

假设

$$x = 0.9999\cdots,$$

那么

$$10x = 9.9999\cdots。$$

（现在，你看到乘法分配律再次被误用了！）。而

$$9.9999\cdots = 9 + 0.9999\cdots = 9 + x。$$

等等：在上面第一步计算中我们也误用了结合法则！！！如果你不相信，你可以试着弄清楚

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \text{ 是多少?}$$

它是 1 吗（如果你相信上述和与 $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) \dots$ 相同）？还是 0（如果你相信上述和与 $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$ 相同）？

面对所有这些问题，你们仍然对教授学生循环小数有兴趣吗？让我们等到在预微积分课程中再教授他们“无限级数”吧。