余数的游戏---恒等式公理，你很熟悉吗？

诸子数学

11-20-2020

这也是一个较古老的游戏：任意给个你喜欢的自然数，把它平方一下再加上 1，看看所得的数可不可以被 3 整除。

你会发现得到的数总是除不尽 3！ 有点奇怪吗？很容易找到自然数加上 1 后能被 3 除尽，哪为什么就没有自然数，它的平方加上 1 以后能被 3 整除呢？ 我们来找找原因。这里提醒老师或者家长，玩这样的游戏往往是一个给孩子介绍代数式的很好的切入口。

我们来列代数式。用 n 来表示任意一个自然数，那么它的平方加 1 就可以用n^2+1来表示了。遗憾的是，这个表达式不能帮助我们解决以上的疑惑。（假如由此得到结论：代数式并没有多大用途，那么你要修正一下你的逻辑思维：不是代数式没有用，而可能是你列错了代数式）。

现在我们换一下方式来思考。我们要看一个数能不能被 3 整除，无非是看这个数除以 3 以后所得的余数是多少。那我们可以先把自然数分分类：能被 3 整除的数我们可以用 3n 来表示，这里 n 表示任意一个自然数；被 3 除余 1 的数我们可以用 3n+1 来表示；被 3 除余 2 的数我们可以用 3n+2 来表示。任意一个自然数一定是上面三类数中的一类。那我们就可以用代数运算来验证了。

第一类数 3n, 它的平方加上 1 就是

$$(3n)^2+1=9n^2+1。$$

容易看出：这个数除以 3 余数为 1，所以它不能被 3 整除。

第二类数 3n+1, 它的平方加上 1 就是

$$(3\mathrm{n}+1)^2+1=9n^2+6n+2。$$

也容易看出：这个数除以 3 余数为 2，所以它也不能被 3 整除。

第三类数 3n+2, 它的平方加上 1 就是

$$(3\mathrm{n}+2)^2+1=9n^2+12n+5。$$

同样可以看出：这个数除以 3 余数为 2，所以它同样不能被 3 整除。

到这里，谜底就彻底解开了！

我们来复盘一下如何揭谜的：第一步要学会用除 3 所得余数的方式来把自然数分类，第二步我们还要做代数式的平方运算。这样的运算一般是孩子们在初中阶段才学的内容。可事实上，孩子们懂得了加法和乘法的三大运算法则以及指数的记号后，很容易理解和掌握代数式的平方运算。

我们下面再用同余等式的概念来解密上面的游戏。同余等式的概念虽然课本上没有涉及，但是一个比较容易懂的概念。假如一个自然数 n 除以 3 余 1，我们记作

$$n\equiv 1 \qquad (mod\ 3)。$$

同样地，假如一个自然数 n 除以 3 余 2，我们记作

$$n\equiv 2 \qquad (mod\ 3)。$$

我们注意到，“自然数 n 除以 3 余 2”这个事实同“自然数 n 除以 3 余-1”是一样的的，所以我们总有：

$$n\equiv 2\equiv -1 \qquad (mod\ 3)。$$

用同余的概念我们可以把自然数 n 分成下面三类：

（1） $$n\equiv 0 \quad (mod\ 3)，$$

（2） $$n\equiv 1 \quad (mod\ 3)，$$

及

（3） $$n\equiv -1 \quad (mod\ 3)。$$

诸子杂谈-3

假如大家对恒等式的三个欧几里得不变公理熟悉的话，从同余的定义可以推出同余等式和恒等式一样满足等式的三个欧氏不变性质：对任意整数 A, B, C, D 及非零自然数 m, 都有

（相加不变性） $A \equiv B \pmod m$ 等价于 $A + C \equiv B + C \pmod m$;

（相乘不变性） 假如 $C \neq 0$, 那么

$$A \equiv B \pmod m \quad \text{等价于} \quad AC \equiv BC \pmod m;$$

（相等的传递性） $A \equiv B \pmod m$，且 $B \equiv C \pmod m$, 那么 $A \equiv C \pmod m$。

由此，我们又可以推出（试试自己推导）：

假如

$$A \equiv B \pmod m, \quad \text{且} \quad C \equiv D \pmod m,$$

那么

$$A + C \equiv B + D \pmod m \quad \text{以及} \quad AC \equiv BD \pmod m。$$

运用以上不变性质我们由（1）推出能被 3 整除的数 n 满足：

(4) $$n^2 + 1 \equiv 1 \pmod 3;$$

由（2）和（3）推出除以 3 余数为 1 或 2 的数 n 都满足：

(5) $$n^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3。$$

上面的（4）式和（5）式说明任何一个自然数的平方加上 1 都不能被 3 整除。

运用上面的同余等式不变性，大家也可以去思考一下为什么对给定的一个自然数，它在各个位置上的数之和能被 9 整除，那么这个自然数就可以被 9 整除。比如数 234567 是可以被 9 整除。事实上，大家注意到不管是 10 也好，100 也好， 1000 也好，它们除以 9 所得的余数都是 1。现在是不是能想通原因了？