1　投票，还是不投票？这不应该是问题

诸子数学, September 29, 2020 © 2020 Meijun Zhu

1.1　马丁 · 尼莫拉的一首诗

德国神学家兼信义宗牧师马丁 · 尼莫拉写过一篇二战过后的忏悔文。该文以诗为体裁呈现。1946 年首先用德文写成。它描述了德国的知识分子与牧师屈服于纳粹势力，帮助纳粹肃清一群又一群的无辜者，最后自己也成了被肃清的无辜受害者。该诗意旨在阐明无视与自己无关的团体所造成的结果，后来被广泛引用，作为对不关心政治的人之呼吁（编自 wikipedia)。

起初他们来了。。。(First they came...)

起初，纳粹抓共产党人的时候，
我没说话，因为我不是共产党人。

当他们抓犹太人的时候，
我也没说话，因为我不是犹太人。

当他们抓工会成员的时候，
我还是没说话，因为我不是工会成员。

当他们抓天主教人的时候，
我依然没说话，因为我也不是天主教人。

最后当他们来抓我时，
再也没有人站起来为我说话了。

诗里道出：那些于自己无关的事情 (纳粹抓共产党人, 抓犹太人, 抓工会成员, 抓天主教人) 到头来确是跟自己命运攸关的。这是怎么回事？我们在这里从逻辑（数学）的角度来刨析原因。

1.2　相关性和无关性

为简便起见，我们将所发生的事件用二维向量来代替。给定两个向量 $\vec{U} = (u_1, u_2)$ 和 $\vec{V} = (v_1, v_2)$。在一定的社会条件下（比如说：法律，伦理，社会关系以及人们的视角，观点等等），向量与向量之间有相互的作用，我们称之为向量的内积，记作 $< \vec{U}, \vec{V} >$。由这个作用关系我们能计算向量与向量之间的夹角。夹角为零，我们就称这两个向量是密切相关的；夹角为 90^o, 也就是这两个向量互相垂直的话，我们就称它们是无关的。

事实上，假如我们记向量 $\vec{U}$ 和 $\vec{V}$ 之间的夹角为 θ 的话，我们可以用下面的式子来计算 θ:

$$\cos\theta = < \frac{1}{|\vec{U}|}\vec{U}, \frac{1}{|\vec{V}|}\vec{V} >$$

这里 $|\vec{U}| = \sqrt{< \vec{U}, \vec{U} >}$ 是向量 $\vec{U}$ 的长度，$|\vec{V}| = \sqrt{< \vec{V}, \vec{U} >}$ 是向量 $\vec{V}$ 的长度。当然我们这里只考虑不平凡的向量，也就是说我们假定 $\vec{U}$ 和 $\vec{V}$ 的长度都大于零。

著名的柯西-史瓦兹不等式说: 对任意两个向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$

$$< \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}, \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} > \leq 1,$$

并且以上的等号成立当且仅当 $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$。也就是 $\vec{u} \parallel \vec{v}$。通俗地讲：相关的事件总是相关的，不管你用什么观点来看。

我们来看无关性。用一个具体的例子：考虑两个向量 $\vec{U} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$。

使用常用的平面向量的点积 $\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1v_1 + u_2v_2$，我们得到：

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

它们是无关的。

我们换一个内积。对任意两个向量 $\vec{u} = (u_1, u_2)$ 和 $\vec{v} = (v_1, v_2)$, 定义新的内积

$$< \vec{u}, \vec{v} >_{新} = u_1v_1 + 2u_2v_2.$$

那么使用新的内积，$\vec{U}$ 和 $\vec{V}$ 的长度分别是：

$$|\vec{U}|_{新} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad |\vec{V}|_{新} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以

$$< \frac{1}{|\vec{u}|_{新}}\vec{u}, \frac{1}{|\vec{v}|_{新}}\vec{v} >_{新} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0!$$

通俗地讲：无关的事件换一个角度来看可能就不是无关的了。

进一步地，对任意一个整数 k, 我们可以引入一个新的内积

$$< \vec{u}, \vec{v} >_k = ku_1v_1 + u_2v_2.$$

那么使用这个新的内积，$\vec{U}$ 和 $\vec{V}$ 的长度分别是：

$$|\vec{U}|_k = \sqrt{\frac{k+1}{2}}, \quad |\vec{V}|_k = \sqrt{\frac{k+1}{2}}.$$

所以

$$< \frac{1}{|\vec{u}|_k}\vec{u}, \frac{1}{|\vec{v}|_k}\vec{v} >_k = \frac{k}{k+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{k+1}.$$

可以看出，当 k 变得越来越大时，两个向量的夹角会越来越逼近 0^o！通俗地讲：两个无关的事件随着事态（内积）的发展会变得密切相关了。

1.3 是投票的时候了

在见识了昨晚混乱的总统竞选辩论后，在读了这篇短文后，投票，还是不投票，不应该还是问题了吧。