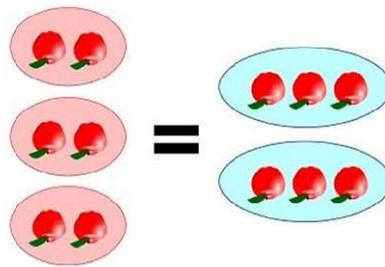


数学学习的第一个大障碍——分数运算

诸子数学

12-5-2020（更新 10-17-2023）

《这篇文章适合三年级及以上的学生及学生家长，小学教师，中学老师；及任何童心未泯的老儿童，青壮年。》



如上图：横加：3 个 2；竖加：2 个 3 --- 乘法的交换律。一般的孩子在学习计数时大都会喜欢这个新颖的游戏。不信你问问他们：100 个 3 相加是多少。也许有些孩子在背诵乘法表时没有如你所希望的那么快，但事实是：要在这个世界上找几个不记得乘法表的人也是很困难的。或早或晚，孩子们都会记住 9×9 乘法表。我们也相信，到了三年级，没几个孩子会坚持把 100 个 3 一个一个加起来，而不理解这其实就是 3 个 100，也就是 300。基于这些思考，我们不能完全领会：为什么我们不在孩子们学习了乘法表以后（三年级下）就告诉它们加法和乘法运算满足三条运算法则：

对任意的三个自然数 a, b, c , 都有

(a) (交换律) $a + b = b + a, \quad a \times b = b \times a。$

(b) (结合律) $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)。$$

(c) (分配律) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c。$

一种可能性是：中国的孩子们还没学习英文字母，对用字母表示的公式不能理解。这个猜测好像也不成立，美国的教材及现在很有名的新加坡数学教材也没有及时地跟孩子们讲授这三个法则。注意到的是，这三个运算法则（首先对自然数成立）对接下来引入的新数（负数，分数，无理数以及复数）都成立。不仅如此，这些法则对我们理解新引入的数也至关重要。

我们也注意到，学习分数的定义和运算是很多孩子在学习数学的旅程中碰到的第一个大挑战。缺乏对以上运算法则的理解和掌握也许是这些学生在学习分数时感到比较吃力的主要原因之一。

几乎所有的教材(当然，我们诸子数学的课本除外)在引入分数及介绍分数运算时至少有两个很疑惑的地方。(1) 没有把分数同整数除法（或倒数）直接联系起来。学生会花很长一段时间才能领悟 m/n 就是 $m \div n$ ，也与 m 倍的 $1/n$ 是一样的。(2) 运用算术运算的固定运算次序，先介绍分数的加减，后介绍分数的乘除。事实上，一方面分数本身已经有乘除运算了，还强调先做加减后做乘除在逻辑上讲不通；另一方面，在介绍不同分母的分数相加时，又不得不介绍等价分数。如伍鸿熙教授早就指出的：没有介绍分数的乘法，等价分数的引进也是有漏洞的。

等价分数的介绍：对任意两个整数 m 和 n (n 是个非零整数) 及任意一个非零的整数 k ,

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n} \times 1 = \frac{m}{n} \times \frac{k}{k} = \frac{mk}{nk}。$$

上面最后一步使用了分数的乘法运算。

在诸子数学第一册《代数入门》里，这两个疑惑不复存在。首先我们定义：

对任意两个整数 m 和 n (n 是个非零整数)，

(定义1) $\frac{m}{n} = m \div n = m \times \frac{1}{n}。$

习惯上我们也称 $1/n$ 是非零整数 n 的倒数（倒过来的数，这里中文翻译 *reciprocal* 为倒数太绝了）。上面定义也指明：除以一个非零数就是乘以这个数的倒数。

有了以上的定义，我们很容易就可以得到分数乘法的第一个法则

对任意两个非零整数 m 和 n ，

$$(公式1) \quad \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{nm}。$$

(公式1)可以这样验证：我们只要能验证 nm 的倒数是 $1/n \times 1/m$ 就可以了。这比较容易证，用一下乘法交换律,结合律及分数的定义即可（你能看出来我们什么地方用了交换律，哪里用了结合律，哪里用了分数的定义吗？）。

$$验证公式1 \quad nm \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = n \times \frac{1}{n} \times m \times \frac{1}{m} = 1。$$

由（公式1）及分数的定义（定义1），我们就可以推导出一般的分数乘法公式(自己试试推导吧)

对任意两个整数 k, l , 及任意两个非零整数 m 和 n ，

$$(公式2) \quad \frac{k}{n} \times \frac{l}{m} = \frac{kl}{nm}。$$

学习了分数的乘法后，我们再来看分数的加法。首先对同分母的两个分数，我们有

对任意两个整数 k, l , 及任意非零整数 n ，

$$(公式3) \quad \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = \frac{k+l}{n}。$$

运用一下分数的定义及分配律即可验证（公式3）。

$$验证公式3 \quad \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = k \times \frac{1}{n} + l \times \frac{1}{n} = (k+l) \times \frac{1}{n} = \frac{k+l}{n}。$$

对不同分母的分数，使用分数乘法我们可以得到两个同分母的分数，然后运用（公式 3）就可以把它们加起来了。

（公式 4） $\frac{k}{n} + \frac{l}{m} = \frac{km}{nm} + \frac{nl}{nm} = \frac{km+nl}{nm}$ 。

如何把所得分数化简那是另一个问题了（要用到基于算术基本定理的整数的分解性质），这里不再累述。