余数的游戏---竖式运算，你很熟悉吗？

诸子数学

初稿于 11-17-2020

这是一个较古老的游戏：任意给个你喜欢的三位数，把它连写两遍得到一个六位数。比如 321321。用这个数除以 7，看看你得到的余数是多少？

你会得到：余数是 0。这是偶然的吗（游戏的好玩性依赖于你会不会自然问出问题）？试试另一个数： 879879。答案是一样的。这是怎么回事？

简单的推理，你会断定，任选的三位数不会是导致余数为 0 的原因。数感好点的读者也许这个时候就能发现：321321=321×1001， 及 879879=879×1001。Wow，谜底揭开了：原来 1001 能被 7 整除！进一步你发现：1001=7×11×13。用 11 或 13 来换 7，上面的游戏一样能玩。

当然 1001 这个数也蛮好玩：这个看上去像个质数的数有三个质数因子 7， 11 和 13 。这里我们不再去深究。想深究的问题是：如何培养“数感”？更直接地：如何很快看出：321321=321×1001， 及 879879=879×1001？

假如大家对竖式乘法熟悉的话，321321=321×1001 还是比较容易看出来。见如下算式（图（A））。

那么大家对竖式运算有多熟悉（知道它的原理吗? 会用竖式算别的进制数的运算吗?）用两个五进制数的乘法来试试你对竖式乘法及“进位”的理解吧：

计算 $312_5 \times 213_5$（答案是 $= 123011_5$）。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 3 & 2 & 1 \\
\times & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & 3 & 2 & 1 \\
+ & 3 & 2 & 1 & & & \\
\hline
 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

(A)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 3 & 1 & 2 \\
\times & & & & 2 & 1 & 3 \\
\hline
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & 4 & 3 & 1 \\
 & & & 3 & 1 & 2 & \\
 & 1 & & & & & \\
+ & & 1 & 2 & 4 & & \\
\hline
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

(B)

上面的计算（图（B））你能看懂吗？圆圈里的数是进位数（比如：$2 \times 3 = 6 = 5 + 1 = 11_5$，写 1 进 1；$3 \times 3 = 9 = 14_5$，写 4 进 1；$4 + 1 + 4 + 1 = 10 = 20_5$，写 0 进 2。)