诸子杂谈-10

算术平方根，那算术立方根呢？ – 初等数学的第二个大障碍

诸子数学

12-25-2020

《这篇文章适合任何知道根号的学生及学生家长，小学教师，中学老师； 任何童心未泯的老儿童，青壮年， 及任何一位希望重学一遍初等数学的数学教育者。》

平方，立方的数学概念其实在学生学十进制计数时就已有接触。10 的平方(也叫二次方）是百，10 的立方（也叫三次方）就是千，百的平方是万，万的平方是亿。所以，说学生在一年级就学了平方和立方也不为过。好玩的是（假如你不觉得奇怪），平方，立方的逆运算：开平方根和开立方根却要等到七年级的下半学期。这里先不管这个时间上的大跳越， 倒是由此也可以想象平方根，立方根应该是个非常困难的概念。

平方根的定义也不是那么可怕。你若问什么数的平方是百，大部分人稍有迟疑，也会答出：是 10。据此，我们定义：100 的一个平方根是 10。是的，10 只是一个 100 的平方根。那另一个是什么？。。。。。。。。。。。。 对的，是 -10。由于负负得正，我们稍作思考也能领悟：除 0 以外，一个数的平方根应该是两个。那困难从哪里来？

我们来试着问个类似问题：什么数的平方是 2？大部分成人可能都没有迟疑就答出：是根号 2， 或负的根号 2。学生没听过根号 2，我们也可以解释：因为没有整数的平方是 2，所以我们就“造”个新数（或新记号）根号 2 来代表这个数。至于有关根号 2 的更多传说，有精力可以去听听，没精力，就让它继续传说下去也无妨。我猜测：对这些传说的不理解可能是学生害怕根式的原因之一。

有关$\sqrt{2}$的传说：

(a) 一定有这个数，它的平方是 2 吗？------------------- 传说是：有的，你甚至可以造出这个长度的线段。

(b) 这个数可以用整数，通过有限次分割造出来吗？换句话说：这个数是我们常说的有理数吗？ ---------------- 传说是：早在两千年前，欧几里得就确定了：$\sqrt{2}$ 不是一个有理数！它就是我们在讲长方形面积时提到的“无理数”。

假如一个无理数没把你吓退，那我们继续。有什么数，它的平方是个负数吗？觉得这又是个传说？是的，我们以后的写作里再提---虚数，复数的概念可以由此引出。单是考虑数的平方根运算就会产生“无理数”和“复数”两个大概念，无疑，根式的引入对一般学生而言会有很大的挑战。

这里只考虑正数的平方根。

从上面的例子里，我们看到，对一个正数来说，它有两个平方根：一个是正，一个是负。由此，中文教科书上做如下定义。

给定一个正数a，它有两个平方根：一个是正的，叫做a的“算术平方根”，记作$\sqrt{a}$；一个是负的， 记作$-\sqrt{a}$。

只看平方根的话，这个算术平方根的名词也没什么害处，无非就是指正数的正的平方根。但是，假如我们考虑一般的 n-次根的话就有很多疑惑。比如你问我：算术立方根是什么？我就无言以对了。

我们来看看立方根的例子。你若问什么数的立方是千，大部分人还是会答出：是 10。因此，我们定义：1000 的立方根是 10。还有别的立方根吗？ 你会摇头了。因为只有“一个”1000 的立方根，好像就没必要引入“算术立方根”了。哪有没有算术 4 次根？好像也没地方提过。

把平方根和立方根做如此分类（一个有“算术”根，一个没有）并不是一个好的策略，反倒容易引起不必要的误解。 我们更提倡统一地称一个正数的“算术平方根”为“主平方根”（principal square root）。或简单地称为正平方根。也想提醒大家，英文里也不常见 “arithmetic square root”， 一般用“principal square root”。

诸子杂谈-10

因为已经有关于根式的众多传说，我们不妨告诉学生多一个传说：任何一个非零的数都有 n 个不同的 n-次根。不幸的是，你在实数域里也许一个都看不到。在学习了复数以后我们会定义任给的复数的 n-次根，以及它的“主 n-次根”。我们会确定任何正数的“主 n-次根”都是正数！因而中文教科书上的算术平方根就是主平方根。

有兴趣的读者可以在诸子数学第一册的第 17 章读到 1 和-1 的所有 4 次方根（为大家的方便，列表如下）。

$$1\ \textit{的四次方根：}\ 1\left(\textit{主}\ 4\ \textit{次方根}\right)，\ i, \qquad -1, \qquad -i.$$

$$-1\ \textit{的四次方根：}\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\textit{主}\ 4\ \textit{次方根}\right)，\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

也许，告诉了学生任何数都有 n 个 n-次根，大家反倒更坦然对待根式。也许他们也更期待学习虚数和复数了。