代数学习的第一个甜头 $---$ 解方程

诸子数学

12-5-2020

《这篇文章适合五年级及以上的学生及学生家长，小学教师，中学老师； 任何童心未泯的老儿童，青壮年， 及任何一位希望重学一遍初等数学的数学教育者。》

在孩子们懂得了代数式，代数式运算（主要就是加，乘和指数运算，参见《数学学习的第一个障碍---分数运算》一文） 之后，可以玩一些基本的速算原理。我比较喜欢的是速算 78×72=7×8×100+8×2， 87×83=8×9×100+7×3 等等这样简单的游戏，希望孩子们对(10x+a)(10x+b)之类的运算比较熟悉。

事实上，当 a+b=10 时，

$$(10x+a)(10x+b)=100x^2+100x+ab=x(x+1)\times 100+ab.$$

由以上公式就很容易懂上面速算的原理了。看看你现在会一口说出 65×65 的答案了吗？

刚学代数式时（的确也不记得是自己学的还是别人教的），我印象最深的还是解方程所带来的欢乐。费尽心机才能解答的算术应用题（大家有谁没听过鸡兔同笼的问题？1500 多年前的《孙子算经》里就列出过这道题），用列方程，然后解方程的办法就比较容易地解答出来。以至于到现在我都在问：为什么不先学解方程呢？ 这里先不去挑战这个问题，而更想同大家分享解方程的愉悦。

先别管一元一次，一元二次， 二元二次等等这样的名词。我们先陈述等式相等的性质，及解方程的原理。欧几里得（Euclid，一个值得任何学者记得的名字）早在两千多年的时候就写下了，大家在随后的年代用的也很随手的，这么几条公理：

诸子杂谈-7

等式相等的性质

$(1)($*相加不变性*$)$　*若两个数相等：*$A=B$，　*那么对任何数*C，　*都有*

$$A+C=B+C。$$

$(2)($*相乘不变性*$)$　*若两个数相等：*$A=B$，　*那么对任何数*C，　*都有*

$$A\times C=B\times C。$$

$(3)($*相等的对称性*$)$　*若*$A=B$，　*那么*$B=A$。

及

$(4)($*等量传递性*$)$　*若*$A=B$，　*且* $B=C$，　*那么*

$$A=C。$$

性质（1）和（2）在解方程时总是被用上。不妨你解一下方程 2x+3=11, 看看哪步用到了哪个性质。

这里我们也想争论：懂得以上解方程的原理（解方程要用以上等式的性质）比学会方程分类更重要。比如我们来解方程：

例 1：求 x 的值：

$$\frac{4}{x}-\frac{1}{3}=\frac{3}{x}。$$

解：　学会了分数以后，我们希望学生们能一眼看出$\frac{4}{x}=4\times\frac{1}{x}$，　*及*$\frac{3}{x}=3\times\frac{1}{x}$。*这样由性质（1）得到*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}。$$

再由倒数的性质得到$x = 3$。

在以上的解法里，我们不鼓励学生在方程两边同乘以 3x。在本文的结尾我会给另一个例子来说明两边同乘以一个未知量的危险性。

做了几个解方程的例子后，让孩子们自己领悟，为什么解像 ax+b=0 这样的方程（求 x 的值）很容易。我们称之为一次方程，因为左边的代数式是一个一次多项式。这个方程里出现的别的字母 a 和 b，我们称之为参数。

来看个比较容易犯糊涂的带参数的例子。

例 2：求 x 的值：

(1)　　$ax = 1$，

(2)　　$ax = 0$。

解：　（1）. *情形 1：若*$a \neq 0$，*那它就有个倒数*$1/a$。*方程两边同乘以*$1/a$，*就得*$x = 1/a$；*情形 2：若*$a = 0$，*那无论*x*是什么值，等式都不成立*（$0 \neq 1$), *所以方程无解。*

（2）. *情形 1：若*$a \neq 0$，*那它就有个倒数*$1/a$。*方程两边同乘以*$1/a$，*就得*$x = 0$；*情形 2：若*$a = 0$，*那无论*x*是什么值，等式都成立*（$0 = 0$), *所以任何值都是方程的解。*

最怕学生不管三七二十一就解上面两个方程。 比如解（1）得到 x=1/a, 然后分析说：a=0 时解没意义! 那“解没意义”又是什么意思呢？当 a=0 时它根本就没有倒数，如何得到 x=1/a 的呢？ 解（2）得到 x=0/a，然后当 a=0 时自己就会糊涂：0/0 到底是不是 0 呢？---你看出来了这是个没有来源，无聊的问题了吗？（写 0/a 之前就要说明 a 不是 0。 提问之前已经漏洞百出，你还有必要考虑这个问题吗？）

最后我们来分析一下如何解下面一个带有参数的方程。

例 3：求 x 的值：

$$\frac{a}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2x}\text{。}$$

解：首先观察倒：$\frac{a}{x}=a\times\frac{1}{x}$, 及 $\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$。这样由性质（1）得到

$$(a-\frac{1}{2})\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\text{。}$$

情形 1， 若 $a\neq 1/2$, 那么

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{a-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2a-1}$$

再由倒数的性质得到$x=2a-1$。

情形 2， 若 $a=1/2$, 那么无论 x 取什么值$0\times\frac{1}{x}=0\ \neq\frac{1}{2}$。也就是方程无解。

一个比较容易忽视的错误是这样犯的：先把原方程化简成一个“一次方程”， 在方程的两边同时乘以“2x”, 得到：2a-x=1。然后由等式性质（1）和（3）得到：x=2a-1。这个结果当然是错的，因为当 a=1/2 时，你得到 x=0 是方程的解。可是 0 显然不能是方程的解，因为这样方程里分数的分母就是 0 了。错误的原因是：方程两边同乘了一个可能是“0”的项，因而可能会产生原方程的“假的解”。

解方程会有很多乐趣， 也会有很多挑战。遵循规律就会少犯错误，少些挫折感，更增加我们对代数的喜欢。