二项式公式－－－贾宪三角

诸子数学

1-14-2021

《这篇文章适合三年级及以上的, 懂得代数运算的学生及学生家长，小学教师，中学老师； 任何童心未泯的老儿童，青壮年》

由于众所不知的原因，数学里用中国人名冠名的定理和规律少之又少。这里我们来讲一个值得我们骄傲的，由中国人首先发现的规律：二项式公式的贾宪三角。

何为贾宪三角？ 在讲这个规律之前，先让我们回顾一下历史。我们这个年纪的人在中学课本上读到和学到的是另一个名字：杨辉三角，大致源于我国著名的数学家华罗庚先生在上世纪 50 年代写给中学生的一本小册子《从杨辉三角谈起》。我把里面的前言摘录如下。

写在前面

这本小册子的内封上所载的图形，称为“楊輝三角”。楊輝三角并不是楊輝发明的，原来的名字也不是“三角”，而是“开方作法本源”；后来也有人称为“乘方求廉图”。这些名称实在太古奥了些，所以我們简称之为“三角”。

楊輝是我国宋朝时候的数学家，他在公元 1261 年著了一本叫做《詳解九章算法》的書，里面画了这样一张图，并且說这个方法是出于《释鎖算書》，賈宪曾經用过它。但《释鎖算書》早巳失传，这書刊行的年代无从查考，是不是賈宪所著也不可知，更不知道在賈宪以前是否巳經有这个方法。然而有一点是可以肯定的，这一图形的发現在我国当不迟于 1200 年左右。在欧洲，这图形称为“巴斯加（Pascal）三角”。因为一般都認为这是巴斯加在 1654 年发明的。其实在巴斯加之前巳有許多人論及过，最早的是德国人阿批納斯（Pertrus Apianus），他曾經把这个图形刻在 1527 年著的一本算术書的封面上。可是无論怎样，楊輝三角的发現，在我国比在欧洲至少要早 300 年光景。

这本小册子是为中国数学会創办数学竞賽而作的，其中一部分曾經在中国数学会北京分会和天津分会举办的数学通俗講演会上講过。它的目的是給中学同学們介紹一些数学知識，可以充当中学生的課外讀物。因此，我們既不鑽进考証的

1

诸子杂谈-12

显然，华老也注意到杨辉是从贾宪的《释锁算术》（大约 1050 年）里学到的规律，只是华老以为贾宪的《释锁算术》文献丢失了，无处查证。因此他把二项式公式系数的规律称作杨辉三角。感谢现在强大的搜索引擎，我们从维基百科里知道：贾宪的三角表图和文字描写，现保存在大英博物馆所藏《永乐大典》卷一万六千三百四十四。所以，我们应该称这个二项式公式系数的规律为**贾宪三角。**

我们来看贾宪三角说的是什么。在诸子数学代数入门的讲座里，我们比较了多项式乘法与十进制数乘法的相似性。把多项式看成一个 x 进制的数，那么(x+1)×(x+1)所得的系数为 1（x 的平方的系数）， 2（x 的系数）及 1（常数）。它与 11×11 所得数 1（10 的平方的系数）， 2（10 的系数），1（个位数）事实上是一样的。

我们也可以用竖式来做乘法运算。比较$(x+1)^2$乘以(x+1)与11^2乘以 11 (也就是$(x+1)^3$与11^3的比较)：

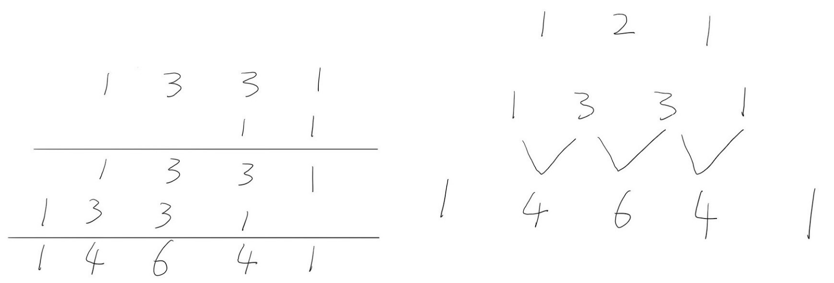
$$\begin{array}{cccc} & x^2 & 2x & 1 \\ & & x & 1 \\ \hline & x^2 & 2x & 1 \\ x^3 & 2x^2 & x & \\ \hline x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

(x+1)的三次方与11的三次方比较

121×11 很容易算：就是 1210+121。所以：第一个数是 1，第二个数是 121 的第一个数加第二个数=3，第三个数是 121 的第二个数加第三个数=3，最后一位数是 1，从而得 1331。这四个数也是$(x+1)^3$ 的各项系数。

诸子杂谈-12

同样我们可以继续算 $11^3\times11$ 得到 $(x+1)^4$ 的各项系数。



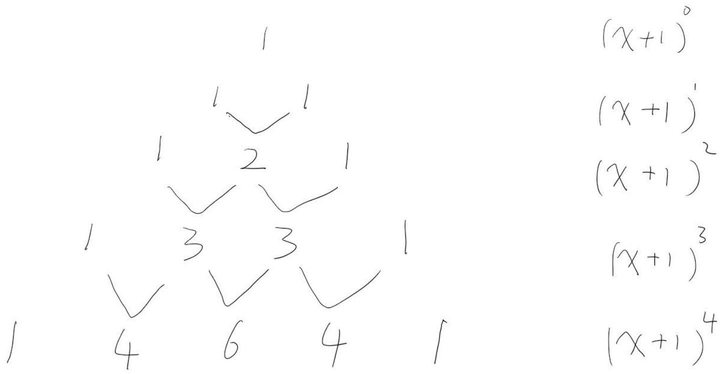
(x+1)的四次方与贾宪三角的形成

在诸子数学的代数讲座中，我们也提到多项式乘法与十进制数的乘法的不同之处。那就是：x 进制数的系数相加是不进位的。我们由此可以想象下面的计算。

假如 $(x+1)^n=x^n+A_{n-1}x^{n-1}+A_{n-2}x^{n-2}+\cdots+A_2x^2+A_1x+1$,

那么, $(x+1)^{n+1}=x^{n+1}+(1+A_{n-1})x^n+(A_{n-1}+A_{n-2})x^{n-1}+\cdots+(A_2+A_1)x^2+(A_1+1)x+1$。

这些系数的关系可以由贾宪三角一眼看成。



贾宪三角

诸子杂谈-12

贾宪三角的规律也可以用组合数来表示，并用数学归纳法来严格证明。遗憾的是，这些系统的，逻辑严密的论证方法在中国古代的文献中鲜有出现。但无论如何贾宪的图标显然有益于大家牢记$(x+1)^n$这个二项式展开公式。