诸子杂谈-8

代数运算的应用－－－长方形的面积公式

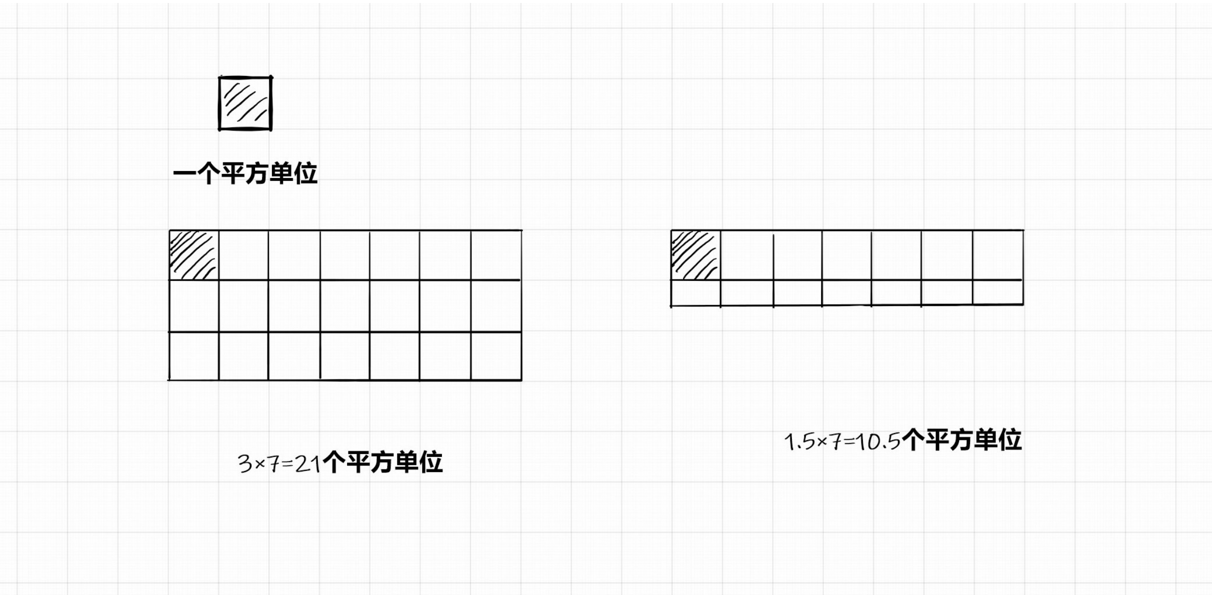
诸子数学

12-17-2020

《这篇文章适合五年级及以上的学生及学生家长，小学教师，中学老师； 任何童心未泯的老儿童，青壮年， 及任何一位希望重学一遍初等数学的数学教育者。》

学习了一点诸子数学的孩子和家长可能注意到了：尽管诸子数学的代数入门进展很快，但似乎它忽略了一些基本的数学概念。比如有些孩子们都会在有理数域里解一些一元二次方程了，可是到现在朱教授都没提一些几何形状的公式。尤其还没讲长方形的面积公式。

我们回顾一下全世界的孩子们大概是怎么学习长方形的面积的。首先我们定义一个边长为一个单位（你可以选个单位，譬如，米或公理）的正方形的面积为 1 个平方单位（譬如平方米或平方公理）。然后我们来“数”一个长方形的面积。是的，长方形的面积一开始是数出来的。



诸子杂谈-8

上图中我们很容易数出左边的长方形有 21 个小正方形在里面，所以它的面积就是 21 个平方单位。右边的长方形的宽为 1.5，是左边的一半，所以我们也可以数出来它的面积是左边长方形的一半：10. 5 个平方单位。我们因此可以说：假如我们能数出一个长方形的长度 L 和宽度 W, 我们就可以数出这个长方形的面积 A=LW。

这是一个美妙的公式。几乎没有哪个在中国上完四年级的孩子不知道这个公式。长方形的面积公式有时也被用来帮助学生形象地理解乘法的交换律：把一个长方形转 90°，它的长变成宽，宽变成长，面积却不变：A=WL。所以 LW=WL。

也别忽视长方形面积的政治意义。它表明：数学是有应用的！这里我来讲一个亲身经历。

有一次我同一名非裔(African American)的工人聊天，问他铺一个房间要大致多少面积的地板。他说不知道。我以为他还没量房间的长宽，便拿起尺子准备去量。

“我已经量过了，长 4 米，宽 3 米”，那个工人告诉我说。

“那你还不知道面积？”我有点诧异。

“我怎么知道面积？老板去买的材料，他知道。”工人非常诚恳地说。

那为什么我们迟迟没讲面积公式呢？原因并不复杂。当长方形的长和宽可以用自然数和分数数出来，大家在学校或者家里或多或少都学了计算它的面积（别问我为什么上面提的工人不知道，也别问我为什么有那么多美国人在现在这个世纪大瘟疫中不戴口罩，更别问我谁在美国做教育部长）。即使还没学，你看了上面的文字估计也会了。

这里要说的是：假如长方形的长或宽不是能用自然数或更一般的分数数出来的，这个面积公式还对吗？要回答这个问题，我们首先要说明有这样的非“有理数”的数，习惯上我们称之为“无理数”。这样的数在大家学习了根式后就会接触到。那么长方形的长 L 或宽 W 是无理数时, 面积公式 A=LW 还对吗？答案是：还对！哪为什么？这要用到下面的假设。

诸子杂谈-8

《初等数学基本假设》：假如一个代数运算或公式对所有的有理数成立，那么这个代数运算或公式对所有的实数都成立。

我们再举一个例子来说明我们是如何使用以上的假设的。

对任给的两个正数a和b, 由根式的定义，我们可以验证，对所有的非零整数m, n, k和l, 都有

$$\text{(I)}\quad a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}},\qquad \text{(II)}\quad (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{mk}{nl}}\quad \text{及}\quad \text{(III)}\quad (a\mathrm{b})^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \times \mathrm{b}^{\frac{m}{n}}\text{。}$$

应用初等数学基本假设，我们就可以得到下面一般的幂运算公式：对任给的两个正数a和b, 及两个非零数p和q, 都有

$$(1)\quad a^{p} \times a^{q} = a^{p+q},\qquad (2)\quad (a^{p})^{q} = a^{pq}\quad \text{及}\quad (3)\quad (a\mathrm{b})^{p} = a^{p} \times \mathrm{b}^{q}\text{。}$$

你要问：当 p 和 q 是复数的话上面三个法则还对吗？那你要问问自己懂得比如这个数：2 的 i 次方，是什么意思吗？你懂这个意思，那就能知道问题的答案了。否则，跟我们一起来学学诸子数学代数入门吧。